

Mechanika kwantowa, lista zadań 9

1. Wyznaczyć energię stanu podstawowego E_0 oscylatora harmonicznego metodą wariacyjną: jako funkcję próbną przyjąć:

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\alpha x^2},$$

gdzie α jest parametrem rzeczywistym. Wyznaczyć stałą normalizacyjną A . Następnie wyliczyć wartość oczekiwaną hamiltonianu

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

w stanie $\psi_0(x)$:

$$J_0(\alpha) = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle$$

Znaleźć wartość α , dla której $J_0(\alpha)$ ma wartość minimalną. Jaka stąd wynika energia stanu podstawowego? Aby znaleźć energię pierwszego stanu wzbudzonego E_1 przyjąć funkcję próbną

$$\psi_1(x) = Bxe^{-\frac{1}{2}\beta x^2}$$

Sprawdzić, że

$$\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle = 0$$

Następnie wyliczyć

$$J_1(\beta) = \langle \psi_1 | H | \psi_1 \rangle$$

i wyliczyć, dla jakiej wartości β występuje minimum $J_1(\beta)$. Wyliczyć dalej energię E_1 .

2. Wyznaczyć energię stanu podstawowego E_0 atomu wodoru metodą wariacyjną: jako funkcję próbną przyjąć:

$$\psi_0(r) = Ae^{-\alpha r},$$

gdzie α jest parametrem rzeczywistym. Wyznaczyć stałą normalizacyjną A . Następnie wyliczyć wartość oczekiwaną hamiltonianu

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{r} \quad (e \text{ ładunek elektroonu})$$

w stanie $\psi_0(x)$:

$$J_0(\alpha) = \langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle$$

Znaleźć wartość α , dla której $J_0(\alpha)$ ma wartość minimalną. Jaka stąd wynika energia stanu podstawowego? Wyliczyć energię pierwszego stanu wzbudzonego przyjmując jako funkcję próbną

$$\psi_1(r) = B(1 + \gamma \frac{r}{a})e^{-\alpha r/a}$$

gdzie $a = \hbar^2/me^2$.