

Mechanika kwantowa, lista zadań 8

1. Średnia wartość energii oscylatora harmonicznego wyrażona przez średnią wartość położenia $\langle x \rangle$ i pędu $\langle p \rangle$

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p \rangle^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x \rangle^2$$

Mamy zasadę nieoznaczoności

$$\langle x \rangle^2 \langle p \rangle^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Oznaczając $y = \langle x \rangle^2$ mamy

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8my} + \frac{1}{2}m\omega^2 y \quad (1)$$

Zbadać zachowanie powyższego wyrażenia w funkcji y . Znaleźć minimalną wartość energii i pokazać, że otrzymujemy jako dolne ograniczenie dla energii energię stanu podstawowego:

$$\langle E \rangle \geq \frac{1}{2}\hbar$$

Jaką wartość ma iloczyn położenia i pędu minimalizujący prawą stronę (1)?

2. Wielomiany Laguerre'a są zdefiniowane wzorem

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^n)$$

Wyliczyć jawnie kilka pierwszych wielomianów Laguerre'a.

3. Macierze Pauliego są zdefiniowane wzorami

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wyliczyć wyznaczniki tych macierzy. Sprawdzić relacje:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= I, \\ \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_1 &= -i\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1,\end{aligned}$$

Sprawdzić relacje komutacji oraz antykomutacji:

$$\begin{aligned}[\sigma_1, \sigma_2] &= 2i\sigma_3, \\ [\sigma_2, \sigma_3] &= 2i\sigma_1, \\ [\sigma_3, \sigma_1] &= 2i\sigma_2, \\ [\sigma_1, \sigma_1] &= 0, \\ \{\sigma_1, \sigma_1\} &= 2I, \\ \{\sigma_1, \sigma_2\} &= 0,\end{aligned}$$

Marek Wolf