

Mechanika kwantowa, lista zadań 3

Wielomiany Hermite'a $H_n(x)$ są zdefiniowane przez wzór:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Funkcja generująca $H_n(x)$:

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} \quad (1)$$

tn.

$$\left. \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = H_n(x). \quad (2)$$

Oto wyprowadzenie: ze wzoru Cauchy'ego mamy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

gdzie C jest konturem zawierającym punkt z_0 . Mamy

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{(z - x)^{n+1}} dz = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{-z^2} \left(\frac{1}{z - x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(z - x)^n} \right) dz \end{aligned} \quad (3)$$

Sumujemy szereg geometryczny i dostajemy

$$G(x, t) = e^{x^2} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{-z^2}}{z - x + t} dz = e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = e^{2xt-t^2}. \quad (4)$$

Rzeczywiście, po zamianie zmiennych $y = x - t$, $d/dt = -d/dy$ mamy:

$$\left. \frac{\partial^n G(x, t)}{\partial t^n} \right|_{t=0} = e^{x^2} \left. \frac{\partial^n e^{-(x-t)^2}}{\partial t^n} \right|_{t=0} = e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \Big|_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = H_n(x).$$

1. Wypisać jawnie kilka pierwszych wielomianów $H_n(x)$.

2. Sprawdzić, że:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (5)$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x) \quad (6)$$

Niech

$$\psi_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (7)$$

3. Sprawdzić, że

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right) \psi_n(x) = 2n\psi_{n-1}(x) \quad (8)$$

$$\left(-\frac{d}{dx} + x\right) \psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) \quad (9)$$

4. Sprawdzić, że

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \psi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \psi_n(x) \quad (10)$$

5. Ortogonalność:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = c_n \delta_{nm} \quad (11)$$

6. Pokazać, że operator $a^\dagger$ nie ma unormowanych funkcji własnych. Wsk. rozwiązać odpowiednie równanie różniczkowe.