

Mechanika kwantowa, lista zadań 11

Macierze Pauliego c.d.

1. Macierze Pauliego są zdefiniowane wzorami

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że są one unitarne:

$$\sigma_i \sigma_i^\dagger = \mathbb{1}$$

2. Pokazać, że zespół 4 macierzy: 3 macierze Pauliego σ_i oraz macierz jednostkowa 2×2

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne, tzn. z

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i \sigma_i = 0$$

wynika, że $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$. Pokazać, że każdą macierz M 2×2 o zespolonych elementach można wyrazić jako kombinację liniową macierzy σ_i , $i = 0, 1, 2, 3$:

$$M = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \sigma_i$$

Wskazówka

3. Znaleźć wartości własne i wektory własne macierzy Pauliego, **Odpowiedź**
4. Sprawdzić, że hermitowska macierz 2×2 (α i $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ są rzeczywiste)

$$\alpha \mathbb{1} + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}$$

ma wartości własne:

$$\alpha \pm \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} = \alpha \pm |\vec{\beta}|$$