

Mechanika kwantowa, lista zadań 10

1. Przypomnieć sobie twierdzenie Noether. Jak w związku z tym można interpretować kwantowy warunek $[\hat{S}, \hat{H}] = 0$ wyrażający fakt symetrii układu opisywanego hamiltonianem $\hat{H}$ względem przekształcenia opisywanego przez $\hat{S}$?

2. Pokazać, że

$$\hat{T}(\mathbf{a}) = e^{i\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a} / \hbar}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$$

jest operatorem translacji:

$$\hat{T}(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a})$$

Skorzystać z zad. 8 z listy 7 z MMF. Czy $\hat{T}(\mathbf{a})$ jest unitarny? Posłużyć się tożsamością Bakera–Hausdorfa

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2},$$

gdy $[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0$ z MMF, zad. 7 z listy 7.

3. Funkcje sferyczne

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m \cos(\theta) e^{im\phi},$$

gdzie

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

W zwartej postaci

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \sin^{|m|}(\theta) \frac{d^{l+|m|} \sin^{2l}(\theta)}{(d \cos(\theta))^{l+|m|}} e^{im\phi}$$

Powyżej występują współrzędne sferyczne:

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = r \cos(\theta)$$

Pokazać, że przy operacji odbicia przestrzennego $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ zachodzi

$$Y_l^m(\theta, \phi) \xrightarrow{\text{odbicie } \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}} Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi)$$

4. Rzutnik (projektor) na stan $|\psi\rangle$ jest dany przez

$$P_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \langle \phi | \psi \rangle |\psi\rangle$$

Pokazać, że rzutnik jest hermitowski i idempotentny, tzn. $P_{|\psi\rangle}^2 = P_{|\psi\rangle}$.