Skaczący liderzy

Ian Stewart przeskakuje odstępy pomiędzy liczbami pierwszymi

Matematyka jest pełna niespodzianek. Kto na przykład mógł przypuszczać, że coś tak prostego, jak liczby naturalne (1, 2, 3, 4...) może zrodzić coś tak skomplikowanego jak liczby pierwsze (2, 3, 5, 7...)? Sposób budowy liczb naturalnych jest oczywisty: jakąkolwiek wybierzemy, bez problemu określimy, która będzie następna. Nie można tego powiedzieć o liczbach pierwszych. A jednak przejście od liczb naturalnych do pierwszych jest łatwe. Po prostu bierzemy liczby, które nie mają dzielników właściwych.

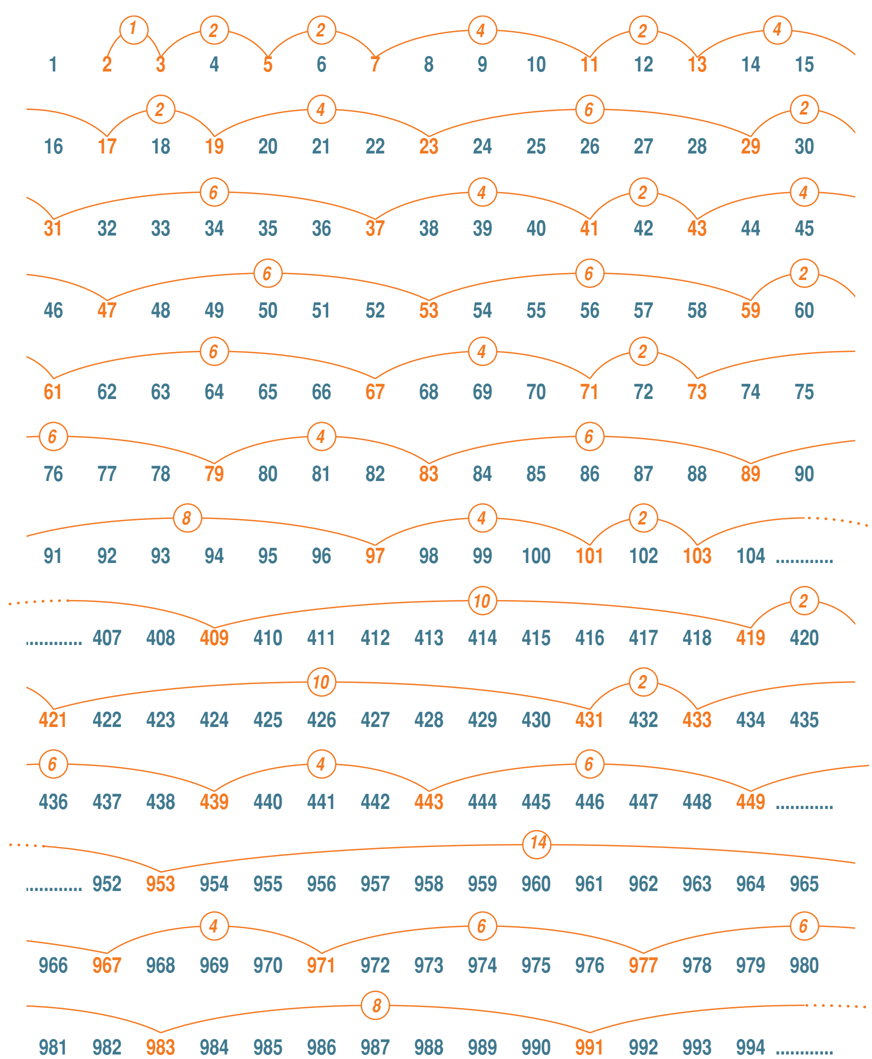
O liczbach pierwszych wiemy mnóstwo, znamy nawet potężne wzory dające dobre przybliżenia, kiedy brak odpowiedzi dokładnych. Twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych mówi, że liczba liczb pierwszych mniejszych od x jest równa w przybliżeniu $x/\ln x$, gdzie ln oznacza logarytm naturalny. Stąd na przykład wiemy, że jest około 4.3×10^{97} liczb pierwszych mających mniej niż 100 cyfr – ale dokładna ich liczba jest wielką niewiadomą.

Ostatnio Andrew Odlyzko z AT&T Labs, Michael Rubinstein z University of Texas i Marek Wolf z Uniwersytetu Wrocławskiego zwrócili uwagę na odstępy pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi. W artykule w *Experimental Mathematics* (tom 8, nr 2, 1999) zadali pytanie: Jaka liczba jest najczęstszym odstępem pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi mniejszymi od x? Pytanie to postawił pod koniec lat siedemdziesiątych Harry Nelson z Lawrence Livermore National Laboratory. Później John Horton Conway w celu opisania tych liczb ukuł nazwę „skaczący liderzy”.

Liczbami pierwszymi mniejszymi od 50 są: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 i 47. Ciąg odległości – różnic pomiędzy kolejną liczbą pierwszą i następującą po niej – to 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2 i 4. Liczba 1 pojawia się tylko raz, ponieważ wszystkie liczby pierwsze oprócz 2 są nieparzyste. Pozostałe odległości są liczbami parzystymi. W wypisanym ciągu liczba 2 pojawia się sześć razy, 4 – pięć razy, a 6 – dwa. Zatem gdy $x = 50$, najczęstszą odległością jest 2, i dlatego właśnie ta liczba jest skaczącym liderem.

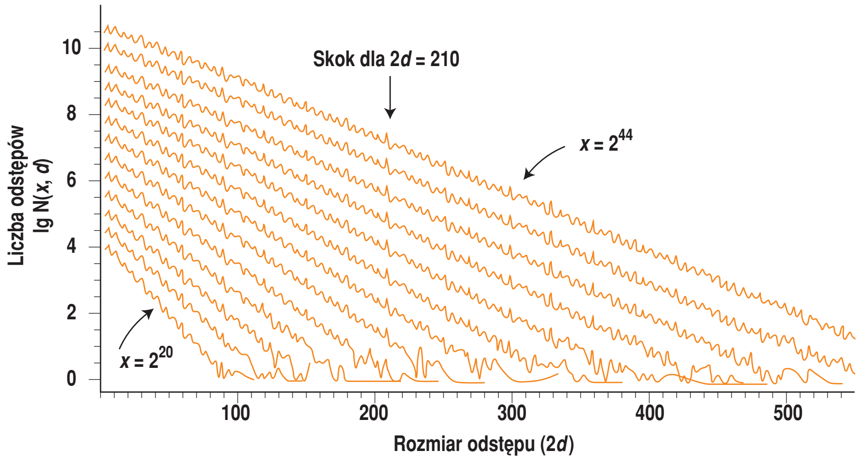
Czasem kilka odległości występuje jednakowo często. Na przykład gdy $x = 5$, odległościami są 1 oraz 2 i obie liczby występują po razie. Dla większych x jedynym liderem jest 2 aż do $x = 101$, kiedy zaszczyt ten dzielą 2 i 4 [*ilustracja poniżej*]. Później liderem jest 2 albo 4, albo obie te liczby aż do $x = 179$, kiedy 2, 4 oraz 6 remisują. W tym miejscu 4 i 6 odpadają, a 2 króluje samodzielnie aż do $x = 379$, kiedy remisują 2 i 6. Powyżej $x = 389$ skaczącym liderem jest głównie 6, od czasu do czasu remisując z 2 albo 4 lub z nimi obiema. Gdy jednak x przebiega od 491 do 541, skaczącym liderem staje się znowu 4. Od $x = 947$ jedynym liderem jest 6 i badania komputerowe pokazują, że nie traci tego tytułu do co najmniej $x = 10^{12}$.

Rozsądne zatem wydaje się przypuszczenie, że gdy pominiemy początkową rywalizację z 1, 2 i 4, jedynym długodystansowym liderem pozostanie 6. Okazuje się jednak, że wzorzec utrzymujący się do liczb rzędu bilionów może się zmienić, gdy liczby staną się jeszcze większe. Właśnie wtedy pojawia się niespodzianka. Odlyzko i jego koledzy dostarczyli przekonującego argumentu, że gdzieś w pobliżu $x = 1.7427 \times 10^{35}$ ska-



ODLEGŁOŚCIAMI, które występują najczęściej pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi, dla liczb mniejszych od 1000, są liczby 2, 4 oraz 6. Nikt jednak nie zna skaczących liderów dla bardzo długich ciągów liczb pierwszych.

WSZYSTKIE ILUSTRACJE: BRYAN CHRISTIE



WYKRES LOGARYTMICZNY obrazuje, w jaki sposób liczba odległości pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi mniejszymi niż *x* zmienia się wraz z wielkością odstępu (2*d*). Z wykresu wynika, że 210 może być skaczącym liderem.

czący lider zmienia się z 6 na 30. Zasugerowali także, że zmienia się on ponownie, tym razem na 210, w pobliżu $x = 10^{425}$.

Poza liczbą 4 przypuszczalni liderzy układają się w elegancki wzór, który staje się oczywisty, gdy rozłożymy te liczby na czynniki pierwsze:

$$2 = 2$$
$$6 = 2 \times 3$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Każda z tych liczb jest iloczynem paru kolejnych liczb pierwszych. Kilka następnych to 2310, 30 030 i 510 510. W artykule Odlyzko i współautorzy stawiają hipotezę skaczących liderów: skaczącymi liderami są iloczyny kolejnych liczb pierwszych oraz liczba 4.

A oto pobieżne wyjaśnienie ich analizy: każdy, kto patrzy na ciąg liczb pierwszych, zauważa, że dość często dwie kolejne liczby nieparzyste są pierwsze: 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19. Hipoteza liczb bliźniaczych mówi, że istnieje nieskończenie wiele takich par. Oparta jest na pomyśle, że liczby pierwsze pojawiają się „przypadkowo" wśród liczb nieparzystych, z prawdopodobieństwem określonym przez twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych. Oczywiście brzmi to jak nonsens – liczba albo jest pierwsza, albo nie jest; żadne prawdopodobieństwo nie odgrywa tu roli. Jest to jednak umiarkowany nonsens w przypadku tego typu zadania. Zgodnie z obliczonym prawdopodobieństwem nie ma szans na to, aby lista liczb bliźniaczych była skończona.

A co z kolejnymi trzema liczbami nieparzystymi, które są liczbami pierwszymi? Jest tylko jeden taki przypadek: 3, 5, 7. Gdy dane są trzy kolejne liczby nieparzyste, to jedna z nich musi dzielić się przez 3, więc nie jest ona liczbą pierwszą poza przypadkiem, gdy jest ona właśnie równa 3. Tak rozumując, nie można jednak wyeliminować układów $p, p + 2, p + 6$ oraz $p, p + 4, p + 6$, a wydaje się, że występują one dość często. Na przykład pierwszy z tych układów spełniają liczby 11, 13 i 17, a następnie 41, 43 i 47. Drugi typ układu pojawia się dla 7, 11 oraz 13 i znowu dla 37, 41 oraz 43.

Około 80 lat temu angielscy matematycy Godfrey Harold Hardy i John Edensor Littlewood przebadali układy tego typu zawierające większe liczby. Stosując rozumowanie probabilistyczne podobnego rodzaju jak opisane dla przypadku liczb bliźniaczych, wydedukowali dokładny wzór na liczbę ciągów liczb pierwszych o danym wzorcu odległości pomiędzy nimi. Wzór jest skomplikowany, więc nie będę go tu przytaczał; zainteresowanych odsyłam do artykułu w *Experimental Mathematics* i załączonej tam bibliografii.

Z pracy Hardy'ego i Littlewooda Odlyzko i jego koledzy wyodrębnili wzór na $N(x, d)$, czyli liczbę odstępów wielkości $2d$ pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi, dla liczb mniejszych od x (używamy $2d$ zamiast d, ponieważ wielkość odstępu musi być liczbą parzystą). Oczekuje się, że wzór ten zachodzi tylko wtedy, gdy $2d$ jest duże a x jest dużo od niego większe. Rysunek po lewej pokazuje, w jaki sposób $\lg N(x, d)$ zmienia się w zależności od $2d$ dla 13 wybranych wartości x pomiędzy 2^{20} a 2^{44} (lg oznacza logarytm przy podstawie 10). Każda z wykreślonych linii jest w przybliżeniu prosta, ale widać na niej mnóstwo „skoków". Szczególnie widoczny jest skok dla $2d = 210$, przypuszczalnego skaczącego lidera dla bardzo wielkich x. (Byłoby to jeszcze bardziej widoczne, gdyby nie spłaszczenie przez logarytm.) Tego typu informacje sugerują, że wzór na $N(x, d)$ nie jest zbyt odległy od rzeczywistości.

Gdy $2d$ jest skaczącym liderem, wartość $N(x, d)$ musi być dość duża. Najlepszym kandydatem jest liczba mająca dużo dzielników pierwszych. Poza tym $2d$ powinno być liczbą tak małą, jak to tylko możliwe w tych warunkach, zatem najrozsądniejszy wybór stanowią iloczyny kolejnych liczb pierwszych. Znany skaczący lider 4 jest tu prawdopodobnie wyjątkiem. Poza tym pojawia się on dla wielkości, w przypadku których wzór na $N(x, d)$ nie jest dobrym przybliżeniem. Wzór pozwala także oszacować, kiedy dany iloczyn liczb pierwszych przejmuje prowadzenie jako nowy lider.

Co zostało do zrobienia miłośnikom matematyki rekreacyjnej? Oczywiście, udowodnienie lub obalenie hipotezy skaczących liderów. Jeśli nie uda wam się żadna z tych rzeczy, spróbujcie poszukać innych interesujących własności odstępów pomiędzy kolejnymi liczbami pierwszymi. Na przykład która z odległości pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi mniejszymi od x pojawia się najrzadziej? A która odległość jest najbliższa średniej? Z tego co wiem, pytania te nadal pozostają bez odpowiedzi, nawet dla relatywnie małych wartości x.

SN

SPRZĘŻENIE_ZWROTNE

W odcinku dotyczącym paradoksów logicznych [„Paradoks utracony", sierpień 2000] twierdziłem, że paradoks „niespodziewana klasówka" opiera się na różnym rozumieniu słowa „niespodziewana" i w ogóle nie jest paradoksem. Kilku czytelników zwróciło moją uwagę na artykuł zatytułowany „Surprise Maximization" (Maksymalizowanie zaskoczenia) w *American Mathematical Monthly* (tom 107, nr 6, czerwiec–lipiec 2000). Autorzy definiują miarę zaskoczenia i pytają, jaką strategię winien obrać nauczyciel, by zmaksymalizować zaskoczenie uczniów. W konkluzji stwierdzają, że wybierając dzień klasówki, nauczyciel powinien użyć takiego rozkładu prawdopodobieństwa, który przypisuje nieduże, mniej więcej jednakowe prawdopodobieństwo początkowym dniom tygodnia i znacząco większe dniom końcowym. Według tej strategii najczęściej wybieranym dniem klasówki byłby piątek.